

Índice general

Introducción	VII
1. Preliminares	1
1.1. Grupos Topológicos	1
1.1.1. El grupo aditivo de los reales	1
1.1.2. El espacio vectorial F^n	2
1.1.3. Las esferas S^0 , S^1 y S^3	2
1.1.4. El grupo lineal $GL(n, F)$	3
1.1.5. El grupo de automorfismos de un espacio	3
1.2. Espacios homogéneos	4
1.2.1. Ejercicio	4
1.3. Grupos actuando en espacios	4
1.3.1. Ejercicio	5
1.3.2. Ejercicio	6
1.3.3. Traslaciones izquierdas y derechas	6
1.3.4. El grupo ortogonal $O(n, F)$	7
1.3.5. El espacio proyectivo real P^n	7
1.3.6. El espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$	8
1.4. Definición de Variedad Diferenciable	8
1.4.1. Ejercicio	9
1.4.2. El espacio Euclidiano \mathbb{R}^n	10
1.4.3. La esfera S^n	10

1.4.4.	El espacio proyectivo real P^n	10
1.4.5.	El grupo lineal $GL(n, F)$	10
1.4.6.	El producto de dos variedades	11
1.4.7.	Funciones reales diferenciables	11
1.5.	El espacio tangente a una variedad en un punto	12
1.5.1.	Ejercicio	13
1.6.	El haz tangente a una variedad	14
1.7.	La diferencial de una función $f : M \longrightarrow N$	15
1.7.1.	Ejercicio	16
1.7.2.	Ejercicio	16
1.7.3.	Campos vectoriales sobre una variedad	16
1.7.4.	Ejercicio	17
1.8.	Subvariedades	17
1.8.1.	Ejemplo	18
1.8.2.	Variedades de Stiefel $V_{n,k}$	18
1.8.3.	Ejercicio	19
1.8.4.	Ejercicio	19
1.9.	Grupos de Lie	19
1.9.1.	Ejemplo	20
1.9.2.	Ejemplo	20
1.9.3.	Variedades de Stiefel $V_{n,k}$	20
1.9.4.	Variedades de Grassman $G_{n,k}$	21
1.9.5.	Las variedades $L_{n,k}$, de k -marcos en \mathbb{R}^n	22
2.	Haces	23
2.1.	Definición provisional de Haz	23
2.1.1.	El haz producto $(B \times F, p, B, F)$	24
2.1.2.	El haz $(S^n, p, P^n, \mathbb{Z}^2)$	24
2.1.3.	El haz tangente a una variedad $(T(M), \pi, M, \mathbb{R}^n)$	24
2.1.4.	El grupo estructural de un haz	25
2.1.5.	Ejercicio	26

2.2. Definición de Haz	27
2.2.1. El haz $(L_{n,k}(M), \pi_k, M, L_{n,k}, GL(n, \mathbb{R}))$	28
2.2.2. Haces vectoriales	30
2.3. Secciones	30
2.4. Transformaciones de Haces	31
2.4.1. Ejercicio	31
2.5. Equivalencia de Haces	31
2.5.1. Ejercicio	32
2.5.2. Ejercicio	34
2.6. Extensión del grupo estructural de un haz	36
2.7. Sistemas de Transición	37
2.8. Haz inducido	39
2.8.1. Ejercicio	41
2.9. El producto de haces $\xi \times \eta$	41
2.9.1. Ejercicio	41
2.10. Definición de Haz Principal	41
2.11. Haces principales de la forma	
$(G, p, G/H, H, H)$	43
2.11.1. Los haces $(O(n), p, V_{n,k}, O(n-k), O(n-k))$	45
2.11.2. El haz $(O(4), p, S^3, O(3), O(3))$ es $O(3)$ -trivial	46
2.11.3. Haces de la forma $(G/K, p, G/H, H/K, H/K_0)$	46
2.11.4. Los haces principales $(V_{n,k}, p, G_{n,k}, O(k), O(k))$	47
2.11.5. Ejercicio	47
2.12. Haces asociados a un haz principal	47
2.12.1. Ejercicio	49
2.12.2. Ejercicio	49
2.12.3. Observación	50
2.12.4. Ejercicio	50
2.13. Representación de Haces	50
2.13.1. Ejercicio	52

2.13.2. Ejercicio	52
2.13.3. Potencias exteriores de un haz vectorial	52
2.13.4. Ejercicio	53
2.14. Reducción del grupo de un haz	53
2.14.1. Ejemplo de reducción	53
2.14.2. Ejercicio	53
3. Clasificación de Haces	55
3.1. Clasificación de Haces	55
3.2. La construcción de Milnor	58
3.2.1. Descomposición del espacio B_G	60
3.2.2. Ejercicio	62
4. Haces Vectoriales	63
4.1. Suma de Whitney	63
4.2. Múltiplos del haz de Hopf	64
4.3. Relaciones entre haces reales y complejos	64
4.3.1. Ejercicios	66
4.4. Producto tensorial de haces	66
4.4.1. Ejercicios	67
4.5. Notación	67
4.6. Inversos multiplicativos	68
4.7. Transformaciones lineales entre haces	69
4.7.1. Transformaciones diferenciales	69
4.8. Homomorfismos entre haces	70
4.8.1. Ejercicio	71
4.9. Haz normal de una inmersión	72
4.10. Sucesión exacta de haces	72
4.11. Inversos aditivos generalizados	73
4.11.1. Ejemplo 1	74
4.11.2. Ejemplo 2	74

5. Los K-grupos de Grothendieck	75
5.1. El grupo universal de un semigrupo	75
5.1.1. Observación	77
5.2. El anillo universal de un semianillo	77
5.3. El anillo de los enteros	78
5.4. El anillo de representaciones de un grupo topológico	78
5.5. El anillo de haces vectoriales sobre un espacio	79
5.6. Anillos de series de potencias	82
5.6.1. Ejemplo	83
5.6.2. Ejemplo	83
5.6.3. Nota	83
5.6.4. Ejercicio	84
6. El Teorema de Periodicidad de Bott	85
6.1. Engrane de haces	85
6.2. Notación	86
6.3. Engranes de haces vectoriales	87
6.4. Haces complejos sobre S^2	88
6.4.1. Ejercicio	89
6.5. Haces complejos sobre $X \times S^2$	90
6.5.1. Notación	91
6.6. Engrane de Laurent	91
6.6.1. Ejercicio	92
6.7. Linearización de haces	93
6.8. Engranes lineales	96
6.9. El teorema de Bott	100
6.9.1. Ejercicio	102
A. Álgebras Universales	105
A.1. Producto tensorial	105
A.2. Producto tensorial de dos espacios vectoriales	108

A.2.1. Bases	108
A.3. Algebra tensorial	108
A.4. Algebra exterior	109
A.5. Algebra exterior de un espacio vectorial finito	110
A.6. Producto tensorial de álgebras exteriores	111
A.7. Producto escalar en espacios vectoriales	112